ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МОЛДОВЫ

Кафедра “Информационные Технологии”

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**К контрольным работам по курсу**

**“Теория систем”**

для студентов заочного отделения

**Разработали:                                                      доктор-конф.    В.Драгонер**

                                                                           ст. препод.        Ю.Балан

**КИШИНЁВ- 2003**

***1.***      ***Введение.***

     Одной из основных проблем при проектировании систем автоматического управления является расчёт устойчивости систем, так как устойчивость есть необходимое условие работоспособности любой системы.

     Согласно математической оценке необходимым и достаточным условием устойчивости линейных систем является отрицательность вещественных частей всех корней их характеристических уравнений. Следовательно, для определения устойчивости системы придётся решать ее характеристическое уравнение, чтобы определить знаки корней последнего. Аналитическое решение алгебраических уравнений 3-го и 4-го порядков требует много времени, а уравнения 5-го и более высоких порядков аналитически вообще не решаются.

     Поэтому возникает вопрос, как определить знаки вещественных частей корней характеристического уравнения, а, следовательно, и определить устойчивость системы, не решая характеристического уравнения.

     Этим вопросом занимались многие учёные. В результате исследований были сформулированы условия устойчивости в виде так называемых критериев устойчивости. Существует несколько критериев устойчивости. Все они математически эквивалентны, так как решают вопрос, лежат ли все корни характеристического уравнения в левой полуплоскости корней или нет. Практическое использование того или иного критерия для конкретной задачи определяется характером самой задачи:

-  алгебраические - а) критерий Рауса, б)  критерий Гурвица

-  частотные - а) критерий Михайлова б) критерий Найквиста

     Ниже приводятся краткие сведения по всем перечисленным критериям и примеры их практического использования.

     Приводятся также задания для контрольных работ, нацеленных для усвоения материала по устойчивости систем.

**2.**      **Критерий устойчивости Рауса**

Пусть характеристическое уравнения системы имеет вид

                     (1)

     Раус предложил свой критерий в виде неравенств, составленных по особым правилам из коэффициентов характеристического уравнения (1) замкнутой системы [л.1], применяется в виде таблицы.

Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Значения | Номер строки | Номер столбца |
| I | II | III | ….. |
|    | 1 | an | an-2 | an-4 | ….. |
|    | 2 | an-1 | an-3 | an-5 | ….. |
| r0= http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image004.gif | 3 | c13= an-2-r0 an-3 | c23= an-4-r0 an-5 | c33= an-6-r0 an-7 | … |
| r1= http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image006.gif | 4 | c14= an-3-r1 c23 | c24= an-5-r1 c33 | c34= an-7-r1 c43 | …… |
| r2= http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image008.gif | 5 | c15= c23-r2 c24 | c25= c33-r2 c34 | c35= c43-r2 c44 | …… |
|  …. | …. | ….. | ….. | ….. | … |

Правила составления таблицы видны из приведенного примера (Табл. 1).

Критерий Рауса формулируется так:

|  |
| --- |
| для того чтобы  система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы все |
| величины (элементы) первого столбца таблицы Рауса были положительными при |
| положительном коэффициенте ап характеристического уравнения. |

Пример.

Определим, устойчива ли система с характеристическим уравнением



результаты расчётов по алгоритму Рауса предоставлены в таблице 2.

Таблица 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Значения | Номер строки | Номер столбца |
| I | II | III | IV |
| -- | 1 | an=a6=5 | a4=20 | a2=15 | a0=1 |
| -- | 2 | an-1=a5=12 | a3=25 | a1=6 | 0 |
| r0= http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image012.gif=0,417 | 3 | c13= 20-0,417\*25=9,6 | c23= 15-0,417\*6=12,5 | c33=1 | 0 |
| r1= http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image014.gif=1,25 | 4 | c14= 25-1,25\*12,5=9,4 | c24= 6-1,25\*1=4,75 | c34=0 | 0 |
| r2= http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image016.gif=1,02 | 5 | c15= 12,5-1,02\*4,75=7,66 | c25= 1 | 0 | 0 |
| r3= http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image018.gif=1,23 | 6 | c16=4,75-1,23\*1=3,52 | 0 | 0 | 0 |
| r4= http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image020.gif=2,18 | 7 | c17=1 | 0 | 0 | 0 |

     Так как все величины первого столбца таблицы 2 положительные, то эта система будет устойчивой.

***3.***      ***Критерий устойчивости Гурвица (Hurwitz).***

     Пусть задана характеристическое уравнения системы (1).

Составим таблицу коэффициентов, называемую таблицу Гурвица.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| an-1 | an-3 | an-5 | **.** | **.** | **.** | 0 |
| an | an-2 | an-4 | **.** | **.** | **.** | **.** |
| 0 | an-1 | an-3 | **.** | **.** | **.** | **.** |
| 0 | an | an-2 | **.** | **.** | **.** | **.** |
| 0 | 0 | an-1 | **.** | **.** | **.** | **.** |
| **.** | **.** | **.** | **.** | **.** | **.** | **.** |
| **.** | **.** | **.** | **.** | **.** | **.** | **.** |
| 0 | **.** | **.** | **.** | a4 | a2 | a0 |

     Таблица Гурвица составляется по следующему правилу.

Первая строка образуется из коэффициентов уравнения с индексами n-1, n-3, т.д. Вторая – из коэффициентов уравнения с индексами n, n-2, n-4, и т.д. Каждая последующая строка образуется коэффициентами уравнения с индексами на единицу больше индексов предшествующей строки; при этом коэффициенты с индексами меньше нуля и больше n заменяются нулями. Таблица содержит n строк, где n – степень характеристического уравнения.

     Из таблицы Гурвица составляются определители к-го порядка  отчёркиванием в таблице **к** строк и **к** столбцов:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|   |   |   |   |   |
|   |   |   | an-1 | an-3 |  |
| http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image024.gif | ; | http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image026.gif |   |   | ; |
|   |   |   | an | an-2 |  |
|   |   |   |   |   |
|   |   |   |   |   |
|   | an-1 | an-3 | an-5 |   |
| http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image028.gif | an | an-2 | an-4 | и т. д. |
|   | 0 | an-1 | an-3 |   |
|   |   |   |   |   |

Критерий  Гурвица формулируется следующем образом:

|  |
| --- |
| Система устойчива, если ап>0 и все определители Гурвица больше нуля, т.e.**http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image022.gif>**0, |
| где **http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image030.gif.**  |

     Для уравнения 5-й степени и выше пользоваться критерием Гурвица нецелесообразно, так как процесс раскрытия определителей высокого порядка становится неоправданно трудоёмким и громоздким. При неоднократных попытках предложить более простые методы раскрытия Гурвицевых определителей авторы приводили к алгоритму Рауса или очень близкому к нему алгоритму.

*Пример.*

Характеристическое уравнения системы имеет вид



определитель устойчивости системы.

Решение.

Составим таблицу Гурвица.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 2 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |

Определитель 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|   | 1 | 1 |   |
| http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image036.gif |   |   | =1\*2-1\*1=1>0 |
|   | 1 | 2 |   |

Определитель

Так как определители >0, то данная система устойчива.

**4.**                      **Критерий устойчивости Михайлова.**

     Пусть задано характеристичекое уравнение n-го порядка



Заменив p=jω, получим функцию

 ,                 (2)

График, которой в комплексной плоскости называется кривой Михайлова (или годографом Михайлова).

     Вещественная U(ω) и мнимая V(ω) части кривой

                          (3)

                             (4)

называются соответственно вещественной и мнимой функциями Михайлова.

     В соответствии с принципом аргумента  [л..1,2] угол поворота вектора D(jω) вокруг начала координат при изменении ω от нуля до бесконечности равен



     Отсюда найдём число правых корней характеристичекого полинома D(p)



     Для устойчивости системы необходимо, чтобы m=0.

     Из последней формулы видно, что m обращается в нуль при одном единственном условии

                                           (5)

     условие (5) – необходимое, но недостаточное условие устойчивости.

     Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все n корней были левыми, иначе говоря, среди них не должно быть корней, лежащих на мнимой оси и обращающих в нуль комплексной полином D(jω), то есть.

   .                         (6)

     Формулы (5) и (6) представляют собой математическое выражение критерия Михайлова.

     Сформулировать его можно так:

|  |
| --- |
|        Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой |
| Михайлова D(jω) при изменении ω от 0 до  повернулся, нигде не обращаясь в нуль, |
| вокруг начала координат против часовой стрелки на угол **http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image054.gif.** |

     При аn>0 все коэффициенты характеристического уравнения устойчивой системы положительны и D(0)=а0>0, то есть кривая Михайлова начинается на вещественной положительной полуоси.

     Нетрудно видеть, что аргументы устойчивой системы изменяется монотонно и D(jω) при возрастании ω вращается только против часовой стрелки. Учитывая это, критерий Михайлова можно сформулировать так:

|  |
| --- |
|          Вектор кривой Михайлова D(jω) устойчивой системы при изменении ω от 0 до , начав  |
| своё движение на вещественной  положительной полуоси, и вращаясь только против часовой  |
| стрелки, проходит последовательно (т.e в порядке 1-2-3-4→1…) n квадрантов координатной  |
| плоскости. |

  Функция D(jω) на комплексной плоскости изображается вектором, начало которого расположено в точке 0, а конец определяется координатами U(ω) и V(ω) по выражениям (3) и (4). С увеличением ω модуль (длина) и фаза вектора изменяются, и конец его описывает кривую, называемую годографом (или кривой) Михайлова.

     Кривую Михайлова строят по точкам, задаваясь различными значениями ω в уравнениях (3) и (4); в числе точек должны быть все точки пересечения кривой с осями координат, получаемые как корни уравнении U(ω)=0 и V(ω)=0.



На рисунке 1a показан годограф устойчивых систем для различных значений n. Все они охватывают соответствующее число квадрантов в положительном направлении. На рисунке 1б показаны годографы неустойчивых систем. Все они не удовлетворяют условию обхода n квадрантов в положительном направлении (т.е. против часовой стрелки).

Пример.

     Используя критерии устойчивости Михайлова, определить устойчивость электромеханической следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна

 ,

где к=58 - общий коэффициент усиления разомкнутой системы, Tm=0.57 сек – постоянная времени двигателя, Ty=0.01 сек – постоянная времени усилителя.

Решение.

     Характеристический полином замкнутой системы имеет вид



Для построения кривой Михайлова определяем вещественную U(ω) и мнимую V(ω) части функции D(jω):





Вычислим U(ω) и V(ω) для ряда значений частоты ω. Результаты вычислений сведём в таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image070.gif, сек-1 | 0 | 5 | 10 | 13 | 15 | http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image072.gif |
| http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image074.gif | 58 | 44 | 0 | - 40 | - 70 | - http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image072.gif |
| http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image077.gif | 0 | 4 | 4,5 | 0 | - 5 | - http://moldova.cc/dragoner/TSLUCMET_files/image072.gif |

По данным таблицы построим кривую Михайлова (рис.2).



Кривая Михайлова последовательно проходит через три квадранты, следовательно, система устойчива.

***5.***                      ***Критерий устойчивости Найквиста.***

     Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазной характеристики разомкнутой системы W(jω) [л.1;2].

     Возможны три случая состояния разомкнутой системы:

Устойчива, неустойчива, нейтральна.

     Приведём здесь формулировку критерия Найквиста для более распространённого первого случая.

|  |
| --- |
| Замкнутая система устойчива (при устойчивой разомкнутой системе), если |
| амлитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы W(jω) не охватывает точку (-1,j0). |

***Задание 1.***

Характеристическое уравнение замкнутой автоматической системы имеет вид



C помощью критерия Пауса определить устойчивость данной системы, используя численные значения коэффициентов, заданны в таблице.

Таблица.

|  |  |
| --- | --- |
| Номер варианта | Численные значения коэффициентов |
| а6 | а5 | а4 | а3 | а2 | а1 | а0 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 100 |
| 2 | 0,05 | 0,1 | 1,5 | 10 | 4 | 50 | 300 |
| 3 | 10 | 20 | 15 | 8 | 12 | 40 | 200 |
| 4 | 15 | 12 | 25 | 5 | 10 | 20 | 150 |
| 5 | 0,005 | 0,15 | 1,25 | 5 | 15 | 50 | 180 |
| 6 | 0,1 | 0,2 | 2,5 | 20 | 30 | 40 | 200 |
| 7 | 0,005 | 0.1 | 2,5 | 20 | 50 | 60 | 150 |
| 8 | 0,15 | 15 | 25 | 10 | 20 | 50 | 200 |
| 9 | 0,015 | 0,2 | 2,1 | 15 | 30 | 20 | 250 |
| 10 | 2\*10-4 | 80\*10-4 | 3\*10-1 | 1,24 | 10 | 40 | 34 |

Номер выбранного варианта согласуется с преподавателем.

**Задание 2.**

Характеристическое уравнение системы имеет вид

0

C помощью критерия Гурвица определить устойчивость данной системы, используя численные значения коэффициентов, заданных в таблице.

Таблица.

|  |  |
| --- | --- |
| Номер варианта | Численные значения коэффициентов |
| а3 | а2 | а1 | а0 |
| 1 | 5 | 20 | 10 | 25 |
| 2 | 10 | 30 | 5 | 10 |
| 3 | 5 | 40 | 2 | 20 |
| 4 | 15 | 10 | 15 | 5 |
| 5 | 3 | 20 | 2 | 10 |
| 6 | 10 | 5 | 20 | 15 |
| 7 | 20 | 25 | 10 | 10 |
| 8 | 10 | 10 | 50 | 40 |
| 9 | 5 | 30 | 10 | 50 |
| 10 | 5 | 5 | 40 | 50 |

Номер выбранного варианта согласуется с преподавателем.

***Задание 3.***

C помощью критерия Михайлова определить устойчивость системы, Характеристическое уравнение которой имеет вид.



Численные значения коэффициентов приведены в таблице.

Таблица.

|  |  |
| --- | --- |
| Номер варианта | Численные значения коэффициентов |
| а5 | а4 | а3 | а2 | а1 | а0 |
| 1 | 0,005 | 0,1 | 2,5 | 20 | 50 | 200 |
| 2 | 0,005 | 0,15 | 1,25 | 5 | 50 | 300 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 55 | 66 | 100 |
| 4 | 0 | 0,001 | 0,02 | 1 | 1 | 100 |
| 5 | 0,15\*10-2 | 5\*10-2 | 0,6 | 4 | 20 | 500 |
| 6 | 8\*10-3 | 0,3 | 1,24 | 10 | 40 | 34 |
| 7 | 3\*10-4 | 5\*10-3 | 0,1 | 0,5 | 0,9 | 1 |
| 8 | 0 | 10-3 | 62\*10-3 | 610\*10-3 | 1 | 9,6 |
| 9 | 0 | 10-3 | 62\*10-3 | 610\*10-3 | 1 | 5 |
| 10 | 0 | 10-3 | 62\*10-3 | 610\*10-3 | 1 | 20 |

Номер выбранного варианта согласуется с преподавателем.

***Литература***

1.                       Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Книга 1. под ред. B. B. Солодовникова, Машиностроение, M:1967.

2.                       Воронов А. А. Основы теории автоматического регулирования. Часть 1, изд-во “Энергия”, M-Л., 1967, 1980.

3.                       Теория автоматического регулирования. Часть 1. Под общей редакцией А. B. Нетушила. Изд-во “Высшая школа”, M., 1968.

4.                       Драгонер B. B. Теория систем. Конспект лекций. Кафедра “Информационные технологии” (электронная форма), 2001.